

Nombres Remarquables :

$$i^2 = -1$$

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$(1-i)^2 = -2i$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

Forme Algébrique, Trigonométrique, Polaire et Exponentielle : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta] = r.e^{i\theta}$$

avec : $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$; $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$ et $\theta \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$

Construction du point M : si M d'affixe $z = x + iy$ alors $M(x, y)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$

si M d'affixe $z = r.e^{i\theta}$ alors $M = \mathcal{C}_{(O, r)} \cap [OT)$ tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{OT}) \equiv \theta [2\pi]$

Nombres Remarquables : ① $1 = e^{i0}$ ② $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ③ $-1 = e^{i\pi}$ ④ $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Formule utile du Rapport : $\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'} = \left(\frac{a a' + b b'}{a'^2 + b'^2} \right) + i \left(\frac{b a' - a b'}{a'^2 + b'^2} \right)$

Conjugué : $\bar{z} = x - iy$

Théorème :
$$\begin{cases} z + \bar{z} = 2x \\ z - \bar{z} = 2iy \\ z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Module : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriétés :
$$\begin{cases} |z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}| \\ |z + z'| \neq |z| + |z'| \\ |z|^2 = z \cdot \bar{z} \end{cases}$$

Théo : z est réel $\iff z = \bar{z}$ ou $\text{Im}(z) = 0$
 z imaginaire pur $\iff z = -\bar{z}$ ou $\text{Ré}(z) = 0$

Théorèmes : ① $z \in \mathbb{R}_+^* \implies \arg(z) \equiv 0 [2\pi]$ ② $z \in \mathbb{R}_-^* \implies \arg(z) \equiv \pi [2\pi]$
 ③ $z \in i\mathbb{R}_+^* \implies \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ④ $z \in i\mathbb{R}_-^* \implies \arg(z) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi]$

Affixe d'un Vecteur : $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$ **Distance :** $AB = |z_B - z_A|$

Propriétés : * $\vec{U} = \vec{V} \iff \text{aff}(\vec{U}) = \text{aff}(\vec{V})$ * $\text{aff}(\alpha\vec{U} + \beta\vec{V}) = \alpha\text{aff}(\vec{U}) + \beta\text{aff}(\vec{V})$

Angle Orienté : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

Colinéarité : $\vec{U}$ col à $\vec{V} \iff \frac{z_{\vec{U}}}{z_{\vec{V}}}$ réel

Orthogonalité : $\vec{U} \perp \vec{V} \iff \frac{z_{\vec{U}}}{z_{\vec{V}}}$ imaginaire pur

Opérations avec la forme Exponentielle :

① $(r.e^{i\theta})(r'.e^{i\theta'}) = rr'.e^{i(\theta+\theta')}$ ② $(r.e^{i\theta})^n = r^n.e^{in\theta}$ ③ $\frac{1}{r.e^{i\theta}} = \frac{1}{r}.e^{-i\theta}$
 ④ $\frac{r.e^{i\theta}}{r'.e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}.e^{i(\theta-\theta')}$ ⑤ $\overline{r.e^{i\theta}} = r.e^{-i\theta}$ ⑥ $r.e^{i\theta} + r'.e^{i\theta} \Rightarrow$ pas de formule

Propriétés des Arguments :

① $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$ ② $\arg(z.z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
 ③ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$ ④ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$
 ⑤ $\arg(z^n) \equiv n.\arg(z) [2\pi]$ ⑥ $\arg(k.z) \equiv \begin{cases} \arg(z) [2\pi] & \text{si } k > 0 \\ \arg(z) + \pi & \text{si } k < 0 \end{cases}$

Formules d'Euler: $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

Formules Magiques: $1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et $1 - e^{ix} = -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$

Formule de Moivre: $(e^{ix})^n = e^{in x} \iff [\cos(x) + i\sin(x)]^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$

Racines Carrées: Soit $Z = a + ib$: donné
et $z = x + iy$: racine carrée } on a alors $\begin{cases} x^2 + y^2 = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = \text{Ré}(Z) = a \\ \text{signe}[xy] = \text{signe}[b] \end{cases}$
de Z si et seulement si $z^2 = Z$

Cas Particulier: Soit $r \in]0, +\infty[$; ① $r e^{i\theta} = \left(\sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2$

② $r = [\sqrt{r}]^2$ ③ $-r = [i\sqrt{r}]^2$ ④ $ir = \left[\sqrt{\frac{r}{2}}(1+i)\right]^2$ ⑤ $-ir = \left[\sqrt{\frac{r}{2}}(1-i)\right]^2$

Racines énièmes: Soit $Z = \rho \cdot e^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$: un nombre complexe donné

$z = r e^{i\theta}$: racine énième de $Z \iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta \equiv \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$ alors $z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$
avec $k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$

Propriétés: ① $\forall n \geq 2, \sum z_k = 0$ ② si n pair alors les z_k sont opposées 2 à 2
③ les points $M_k(z_k)$ forment, dans le plan complexe, un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$.

Définition de j : j est une constante complexe définie par : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Propriétés: ① $j^3 = 1$ ② $j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}$ ③ $j^2 + j + 1 = 0$

Equation de 2^{ème} degré: (E) : $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\delta)^2 \text{ d'où } z' = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z'' = \frac{-b + \delta}{2a}$$

① si $a + b + c = 0$ alors $\begin{cases} z' = 1 \\ z'' = \frac{c}{a} \end{cases}$ ② si $a - b + c = 0$ alors $\begin{cases} z' = -1 \\ z'' = -\frac{c}{a} \end{cases}$

③ si b divisible par 2 $\implies \Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (\delta')^2$; $z' = \frac{-\frac{b}{2} - \delta'}{a}$ et $z'' = \frac{-\frac{b}{2} + \delta'}{a}$

Théorème: $S = z' + z'' = \frac{-b}{a}$ et $P = z' \cdot z'' = \frac{c}{a}$

Equation de 3^{ème} degré: Soit (E): $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ / $a \neq 0$

Pour résoudre l'équation (E) il faut établir les 3 étapes suivantes :

1^{ère} étape: Déterminer la racine évidente z_0 soit $\begin{cases} \text{en suivant les indications de l'énoncé ou} \\ \text{dans l'ensemble } \{1; -1, 2; -2, i; -i\} \end{cases}$

2^{ème} étape: Factoriser (E) sous forme de $(z - z_0)(az^2 + bz + c) = 0$ où a, b et c : sont trois complexes à déterminer par développement puis identification.

3^{ème} étape: Résoudre alors (E)

Rappels Utiles pour le Complexe

Barycentre :

Définition: G barycentre de (A, α) et $(B, \beta) \iff \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$

Théorème: $\forall M \in P$ on a : $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$.

Adresses : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{BA}$

Ensembles des points dans le plan :

I) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha [\pi]$

1^{er} cas : si $\alpha = 0$ alors $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires $\implies M$ décrit la droite (AB)

2^e cas : si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \implies M$ décrit le cercle de diamètre $[AB]$

3^e cas : si $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $\implies M$ décrit le cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B privé de A et B , tangent en A à la droite (AT) telle que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \alpha [\pi]$.

II) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha [2\pi]$

1^{er} cas : si $\alpha = 0$ alors $\overrightarrow{MA}$ colinéaire à $\overrightarrow{MB}$ de même sens $\implies M$ décrit $(AB) \setminus]AB[$

2^e cas : si $\alpha = \pi$ alors $\overrightarrow{MA}$ col à $\overrightarrow{MB}$ de sens opposés $\implies M$ décrit le segment $[AB]$

3^e cas : si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\implies M$ décrit l'arc $(\widehat{BA})$ du cercle de diamètre $[AB]$

4^e cas : si $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ $\implies M$ décrit l'arc $(\widehat{AB})$ du cercle de diamètre $[AB]$

5^e cas : si $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ $\implies M$ décrit l'arc $(\widehat{AB})$ privé de $\{A, B\}$ du cercle passant par A et B , tangent en A à la demi-droite $[AT)$ telle que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \alpha [2\pi]$, situé dans le demi-plan de bord (AB) ne contenant pas $[AT)$.

Remarque : ■ si $\alpha > 0$ alors M décrit $(\widehat{BA})$ ■ si $\alpha < 0$ alors M décrit l'arc $(\widehat{AB})$

Ensemble des points M tels que : $\frac{MA}{MB} = k$

1^{er} cas : si $k = 1$ alors $MA = MB \implies M$ décrit la méd $[AB]$

2^e cas : si $k \neq 1 \implies M$ décrit le cercle de diamètre le segment $[IJ]$ tels que :
 $I : bpp(A, 1) \text{ et } (B; k)$ et $J : bpp(A, 1) \text{ et } (B, -k)$.

Les lignes de Niveaux :

$$\textcircled{1} MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{1}{2} AB^2 \quad \textcircled{2} MA^2 - MB^2 = 2 \overline{AB} \cdot \overline{IH}$$

avec $I = A * B$ et H : projeté orthogonal de M sur la droite (AB)

$$\textcircled{3} \alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha + \beta) GM^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2$$

avec G : barycentre (A, α) et (B, β)

Théorème de la médiane : $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AA'^2 - \frac{1}{4} BC^2$ avec $A' = B * C$

Nombres Complexes Particuliers :

$$\begin{array}{l}
 z \text{ réel} \Rightarrow \begin{cases} \text{Im}(z) = 0 \\ z = \bar{z} \\ \arg(z) = k\pi \Rightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi] \\ z \in \mathbb{R}_- \Rightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi] \end{cases} \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 z \text{ imag. pur} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ré}(z) = 0 \\ z = -\bar{z} \\ \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow \begin{cases} z \in i\mathbb{R}_+ \Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ z \in i\mathbb{R}_- \Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \end{cases}
 \end{array}$$

Conditions Nécessaires et Suffisantes pour les figures géométriques

I) Les Triangles

- 1) ABC isocèle en $A \Leftrightarrow AB = AC$
- 2) ABC rectangle en $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$
- 3) ABC rectangle et isocèle en $A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB = AC \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \end{array} \right.$
- 4) ABC équilatéral $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB = AC = BC \\ \text{ou } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pm \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{array} \right.$

II) Les Quadrilatères

- 1) $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ A * C = B * D \end{array} \right.$
- 2) $ABCD$ losange $\Leftrightarrow ABCD \#$ et $\left\{ \begin{array}{l} AB = AD \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \end{array} \right.$
- 3) $ABCD$ rectangle $\Leftrightarrow ABCD \#$ et $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \\ AC = BD \end{array} \right.$
- 4) $ABCD$ carré $\Leftrightarrow ABCD \#$ et $\left\{ \begin{array}{l} AB = AD \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \end{array} \right.$

Quelques Formules Trigo. Très Utiles

Formules d'Addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

Formules des Angles Doubles

$$\cos(2a) = \begin{cases} 2\cos^2(a) - 1 \\ 1 - 2\sin^2(a) \\ \cos^2(a) - \sin^2(a) \end{cases}$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\sin^2(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2a)$$

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) = r \cdot \cos(x - \varphi) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \varphi = \frac{a}{r} \text{ et } \sin \varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Cosinus et Sinus d'un angle: Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha[2\pi]$

$$\text{alors } \cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{x x' + y y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{x y' - y x'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Géométrie & Complexe

1) $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}$

A) $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$

$M(z) \longrightarrow M'(z')$ tel que $z' = a z + b$ avec $a \neq 0$

1^{er} Cas : si $a = 1$ et $b = 0$ alors $f = Id_{\mathbb{P}}$

2^e Cas : si $a = 1$ et $b \neq 0$ alors $f = t_{\vec{u}}$ avec $z_{\vec{u}} = b$

3^e Cas : si $a = e^{i\theta} \neq 1$ et b quelconque alors $f = R_{(\Omega, \theta)}$ avec $z_{\Omega} = \frac{b}{1-a}$

4^e Cas : si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ alors $f = h_{(\Omega, a)}$ avec $z_{\Omega} = \frac{b}{1-a}$

5^e Cas : si $a = r e^{i\theta} \neq 1$ alors $f = S_{(\Omega, r, \theta)}$ avec $z_{\Omega} = \frac{b}{1-a}$

B) $g : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$

$M(z) \longrightarrow M'(z')$ tel que $z' = a \bar{z} + b$ avec $a \neq 0$

1^{er} cas : si $|a| = 1$ alors g est - à titre indicatif - un antidéplacement
(on cherchera l'ensemble des points invariants)

2^e cas : si $|a| \neq 1$ alors g une similitude indirecte de rapport $k = |a|$,
de centre Ω d'affixe $z_{\Omega} = \frac{a\bar{b} + b}{1-|a|^2}$ et d'axe $\Delta = \{ \overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M} \}$

2) $\mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{C}$

1) $t_{\vec{u}} : z' = z + z_{\vec{u}}$

2) $R_{(\Omega, \theta)} : z' = e^{i\theta} z + z_{\Omega} (1 - e^{i\theta})$

3) $R_{(O, \theta)} : z' = e^{i\theta} z$

4) $S_{\Omega} : z' = -z + 2 z_{\Omega}$

5) $h_{(\Omega, k)} : z' = k z + z_{\Omega} (1 - k)$

6) $S_{(\Omega, k, \theta)} : z' = k e^{i\theta} z + z_{\Omega} (1 - k e^{i\theta})$

7) $S_{(O\vec{u})} : z' = \bar{z}$

8) $S_{(O\vec{v})} : z' = -\bar{z}$

9) $S_O : z' = -z$

10) S_{Δ}

11) $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$

12) $\sigma_{(\Omega, k, \Delta)}$

} pas de cours

BAC MATH

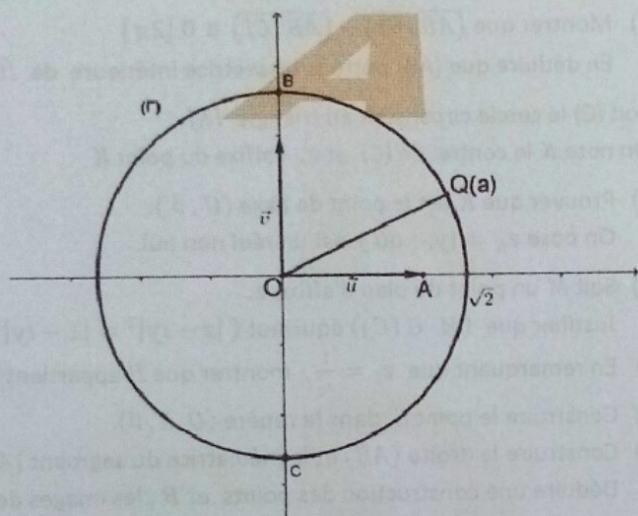
Le COMPLEXE aux BAC

Nouveau Régime : de 2008 au 2020

Exercice 01 : Bac 2020 – Principale – (4 points)

(Complexe + Similitude + Construction)

On munit le plan complexe du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Dans la figure ci-après, (Γ) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. A, B et C sont les points d'affixes respectives : $1, i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$. Soit Q un point du cercle (Γ) d'affixe un complexe a , distinct de $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.



- On désigne par R le point d'affixe $a + \bar{a}$.
 - Vérifier que $R \in (O, \vec{u})$. Construire R .
 - Déterminer les nombres complexes a pour lesquels O, R et Q sont alignés.
- Soit P le point d'affixe ia et M un point d'affixe z non nul.
 - Justifier que P est l'image de Q par une rotation que l'on précisera. Construire le point P .
 - Montrer que :
 A, P et M alignés $\Leftrightarrow (i\bar{a} + 1)z + (ia - 1)\bar{z} = i(a + \bar{a})$
 - Montrer que $(AP) \perp (OM) \Leftrightarrow (i\bar{a} + 1)z + (ia - 1)\bar{z} = 0$.
 - Soit H le projeté orthogonal de O sur (AP) .
 On pose Z_H l'affixe du point H . Justifier que $Z_H = \frac{i(a + \bar{a})}{2(i\bar{a} + 1)}$.
- Soit N le point d'affixe $Z_N = \frac{(a + \bar{a})}{(i\bar{a} + 1)}$.
 - Vérifier que N est l'image de H par une similitude que l'on déterminera.
 - Construire le point N .
 - Déterminer l'ensemble sur lequel varie le point N lorsque Q varie sur le cercle (Γ) privé des points B et C .

Exercice 02 : Bac 2019 – Contrôle – (4.5 points)

(Complexe + Similitude + Suite)

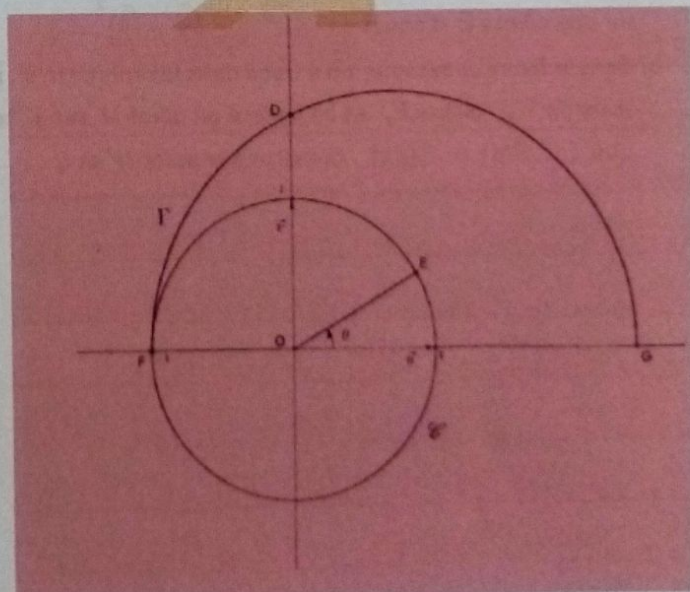
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $R(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points I, C, D et K d'affixes respectives : $1 + i, 1 + 2i, 2i$ et $3i$.

- Placer les points I, C, D et K dans le repère R .
 - Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte g qui transforme I en D et D en K .
 - Déterminer le rapport de g .
 - Déterminer l'image du triangle IDO .
- Soit M un point du plan et M' son image par g . On désigne par z et z' les affixes respectives de M et M' .
 - Montrer que $z' = -\frac{1}{2}(1 + i)\bar{z} + 1 + 2i$.
 - Soit Ω le centre de g . Déterminer l'affixe de Ω .
 - Vérifier que K est le milieu du segment $[\Omega I]$.
 - Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g .
- Soit $h = g \circ g$.
 - Montrer que h est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.
 - On considère la suite des points $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
 $A_0 = I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+2} = h(A_n)$.
 Déterminer et construire les points A_2 et A_4 .
 - Soit $S_n = A_0 A_2 + A_2 A_4 + \dots + A_{2n-2} A_{2n}$.
 Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente et déterminer sa limite.

Exercice 03 : Bac 2018 – Principal – (3 points)

Soit θ un réel non nul. Dans la figure ci-après :

- $\mathcal{C}$ est le cercle de O et de rayon 1.
- E est le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\vec{u}, \vec{OE}) \equiv \theta[2\pi]$.
- F et G : les points d'affixes respectives -1 et $1 + \sqrt{2}$.
- Γ est le demi-cercle de diamètre $[FG]$.
- D est le point d'intersection de Γ et l'axe $(O, \vec{v})$.



- Vérifier que $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$.
 - Soit A le point d'affixe $z_A = i\sqrt{1 + \sqrt{2}} e^{i\theta}$.
 Vérifier que $z_A = OD e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$. Construire alors le point A .

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta} z + e^{i2\theta} = 0$

- a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E)
b) On désigne par B le point d'affixe z_B où z_B est la deuxième solution de (E). Déterminer z_B

3) a) Montrer que les points O , A et B sont alignés

b) Placer le point C d'affixe $z_C = OD e^{i\theta}$

c) Montrer que $\frac{aff(\overrightarrow{AC})}{aff(\overrightarrow{AB})} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$

Déduire que triangle ABC est isocèle et que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

d) Construire alors le point B .

Exercice 04 : Bac 2018 – Contrôle – (5 points)

1) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - (1+i)z - i = 0$
Résoudre l'équation (E). On note z_1 et z_2 les solutions de (E)

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
Soit A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes $1, i, z_1$ et z_2
Soit z un nombre complexe distinct de $1, i, z_1$ et z_2

On note M et M' les points d'affixes respectives z et $z' = \frac{z+i}{z-i}$
Justifier que les points M et M' sont distincts

Dans la suite de l'exercice, on prend $z = i + 2e^{i\theta}$ où θ est un réel

3) a) Montrer que M décrit le cercle Γ de centre B et de rayon 2

b) Montrer que $z' = 1 + i e^{-i\theta}$

c) Montrer que $AM' = 1$ et que $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta [2\pi]$

d) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit Γ .

4) Soit P le milieu du segment $[MM']$ et z_P son affixe.

On désigne par Q le point d'affixe $z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}} z_P$

a) Vérifier que $z_P = \frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}$

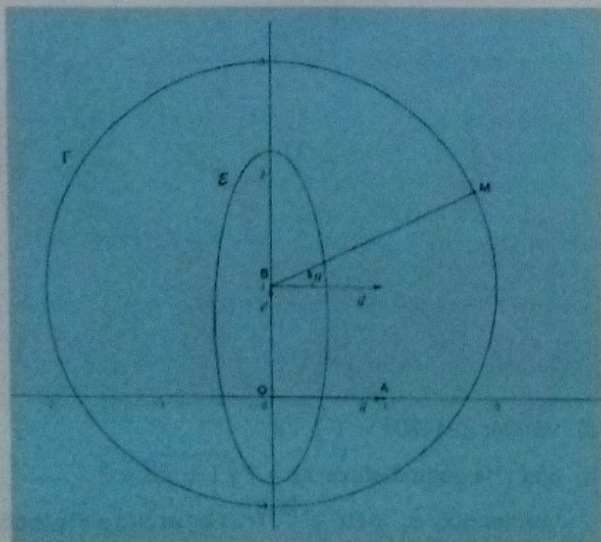
b) En déduire que $z_Q = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}-e^{-i(\theta+\frac{\pi}{4})}}{2}$

c) Montrer alors que $z_Q = \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

5) a) Montrer que lorsque M varie sur le cercle Γ , le point Q varie

sur une ellipse E d'équation : $4x^2 + \frac{4}{9}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

b) Dans la figure ci-dessous, on a tracé dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$
le cercle Γ , l'ellipse E , et on a placé un point M sur Γ tel
que $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) \equiv \theta [2\pi]$. Construire le point M' et Q .



Exercice 05 : Bac 2017 – Contrôle – (4 points)

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 = 0$

1) a) Justifier que l'équation (E) admet deux solutions distinctes.
(On ne demande pas de déterminer ces solutions)

b) Déterminer $z_1 + z_2$.

En déduire que les solutions de (E) ne sont pas conjuguées.

On désigne z_1 la solution telle que $|z_1| > 1$ et z_2 l'autre solution

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, I et J d'affixes : $z_1, z_2, 1$ et -1 .

2) a) Soit C le milieu du segment $[AB]$.

Montrer que l'affixe du point C est $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) En utilisant la relation $(z_2 - z_1)^2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1z_2$,

montrer que $(z_2 - z_1)^2 = 4(z_2^2 - 1)$

c) Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CI}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ}) \equiv 0 [2\pi]$

En déduire que (AB) porte la bissectrice intérieure de $\widehat{ICJ}$

3) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle IAJ .

On note K le centre de (C) et z_K l'affixe du point K

a) Prouver que K est le point de l'axe $(O, \vec{v})$.

On pose $z_K = iy$, où y est un réel non nul.

b) Soit M un point du plan d'affixe z .

Justifier que $(M \in (C))$ équivaut à $|z - iy|^2 = |1 - iy|^2$

c) En remarquant que $z_1 = \frac{1}{z_2}$, montrer que B appartient à (C)

4) a) Construire le point C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Construire la droite (AB) et la médiatrice du segment $[AB]$

c) Déduire une construction des points B et C , les images des solutions de l'équation (E).

Exercice 06 : Bac 2016 – Principal – (3 points)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^2 - (1 + 2i)mz - (1 - i)m^2 = 0$$

où m : un nombre complexe non nul, d'argument $\theta \in]0, \pi[$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E)

b) Montrer que :

$(z_1 z_2 \text{ un réel strictement positif})$ si et seulement si $(\theta = \frac{5\pi}{8})$

Dans la suite de l'exercice, on prend $\theta = \frac{5\pi}{8}$

2) Vérifier que $z_1 z_2 = |m|^2 \sqrt{2}$.

3) Soit t un réel strictement positif et $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}}$.

On se propose de construire les points M_1 et M_2 images de z_1 et z_2 solutions de (E), correspondant au nombre m

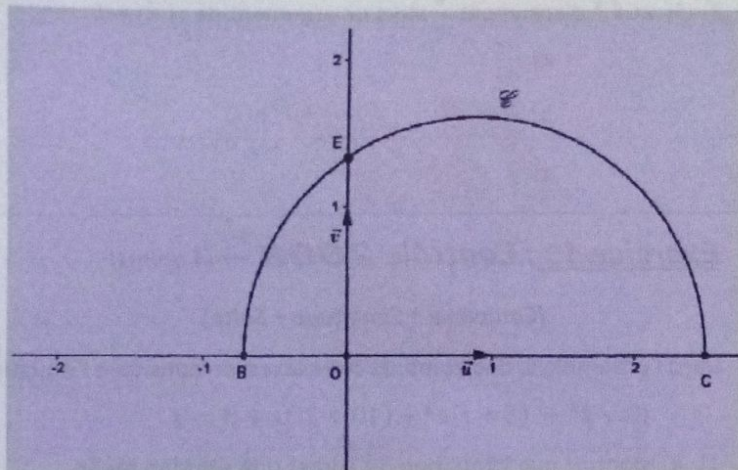
Dans la figure ci-après, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct

B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et t .

E est le point d'intersection du demi-cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BC]$ avec l'axe $(O, \vec{v})$

a) Montrer que $OE^2 = OB \cdot OC$

b) En déduire que $|m| = OE$.



- 4) a) Construire le point A d'affixe m
 b) En déduire une construction des points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de (E). (On convient que $|z_1| < |z_2|$)

Exercice 07 : Bac 2015 - Principal - (5 points)

(Complexe + Rotation)

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 4 = 0$
 b) Déterminer une écriture exponentielle des solutions de (E).
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2.
 Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
- 3) Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$ et M le point de (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.
 On désigne par $N \in (\Gamma)$ tel que $(\vec{OM}, \vec{ON}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$
 Justifier que N a pour affixe $2e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$
- 4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 a) Vérifier que la rotation r a pour expression complexe :
 $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
 b) Soit F et K les milieux respectifs des segments $[BM]$ et $[CN]$
 Montrer que $r(F) = K$
 c) En déduire la nature du triangle AFK
- 5) a) Montrer que $AF^2 + 4 = 2\sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$
 b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

Exercice 08 : Bac 2013 - Principal (3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
 Soit les points E et F d'affixes respectives 1 et i
 On considère par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ et les points M et N d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et $i(1 + e^{i\theta})$.

- 1) a) Calculer $\text{aff}(\vec{EM})$ et $\text{aff}(\vec{FN})$
 b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur $\mathcal{C}_1$ et N varie sur $\mathcal{C}_2$
 c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires

2) Soit P le point d'affixe z_P tel que $z_P = (1 - i)\sin\theta \cdot e^{i\theta}$

- a) Montrer que $\frac{\text{aff}(\vec{EP})}{\text{aff}(\vec{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ et calculer $\frac{\text{aff}(\vec{FP})}{\text{aff}(\vec{FN})}$
 b) Montrer que P est le point d'intersection de (EM) et (FN)

Exercice 09 : Bac 2012 - Contrôle (4 points)

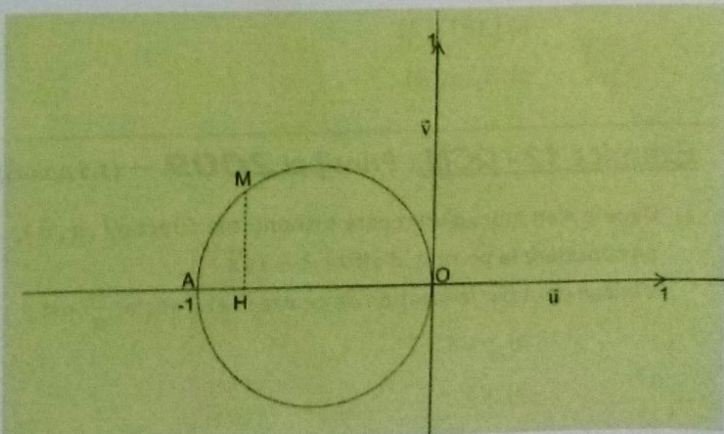
Soit a un réel strictement positif

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1 + i)az + ia^2 = 0$
 2) Le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
 Soit A et B les points d'affixes respectives a et ia
 a) Quelle est la nature du triangle OAB ?
 b) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit carré
- 3) Soient P et Q les points tels que les triangles OAP et AQC sont des triangles équilatéraux de sens direct.
 a) Montrer que l'affixe de P est égale à $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$
 b) Calculer l'affixe du point Q
 c) Montrer que les points B , P et Q sont alignés.

Exercice 10 : Bac 2011 - Principal (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$,
 On considère le point A d'affixe (-1) et les points M , N et P d'affixes respectives z , z^2 et z^3 où $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$

- 1) a) Montrer que : (le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si $\left(\frac{1+z}{z}\right)$ est imaginaire pur
 b) On pose $z = x + iy$. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$
 c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est un cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A .
- 2) Dans la figure ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal sur $(O, \vec{u})$.
 On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que MNP soit rectangle en P .



a) Montrer que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$

puis montrer que $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$

b) Montrer que $OH = OM^2$

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.

Exercice 11 : Bac 2010 – Principal (4 points)

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note A le point d'affixe -2

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes : $\alpha, \frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $\alpha \notin \mathbb{R}$

2) Montrer que si $MNAP$ est un parallélogramme alors α est une solution de l'équation (E)

3) Dans cette question, on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes : $\alpha, \frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, M, N et P

b) Donner l'écriture algébrique des complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que $MNAP$ est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E)

b) En déduire les affixes des points M pour lesquels $MNAP$ est un parallélogramme.

Exercice 12 - QCM : Contrôle 2009 – (1,5 points)

1) Soit z un nombre complexe de module 2 alors $\bar{z}$ son conjugué

est égal à : a) $\frac{\sqrt{2}}{z}$

b) $\frac{2}{z}$

c) $\frac{4}{z}$

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes 1 et i .

L'ensemble des points $M(z)$ tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est réel est :

a) $(AB) \setminus \{A\}$.

b) $[AB] \setminus \{A\}$

c) $\mathcal{C}_{[AB]} \setminus \{A\}$

Exercice 12 - QCM : Principal 2009 – (1,5 points)

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$.

L'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ est :

a) $-\sqrt{3} + i$

b) $\sqrt{3} - i$

c) $-\sqrt{3} - i$

2) Si $z \in \mathbb{C}^*$ d'argument $\frac{\pi}{6}$ alors un argument de $i\bar{z}$ est :

a) $\frac{-\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{3}$

Exercice 13 : Contrôle 2008 – (4 points)

(Complexe + Similitude + Suite)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E) : z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0$$

1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle .

b) Résoudre l'équation (E).

2) Le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

On considère l'application f qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = (1+i)z$.

a) Déterminer la nature et les éléments de f .

b) Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{O\}$ et soit M' son image par f .

Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle

En déduire un procédé de construction de M' .

3) On considère les points A_n définis par :

A_0 le point d'affixe $(-1+i)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = f(A_n)$.

a) Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 .

b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles les points : O, A_0 et A_n soient alignés .

Correction

BAC Math

COMPLEXE aux BAC

Nouveau Régime : de 2008 au 2020

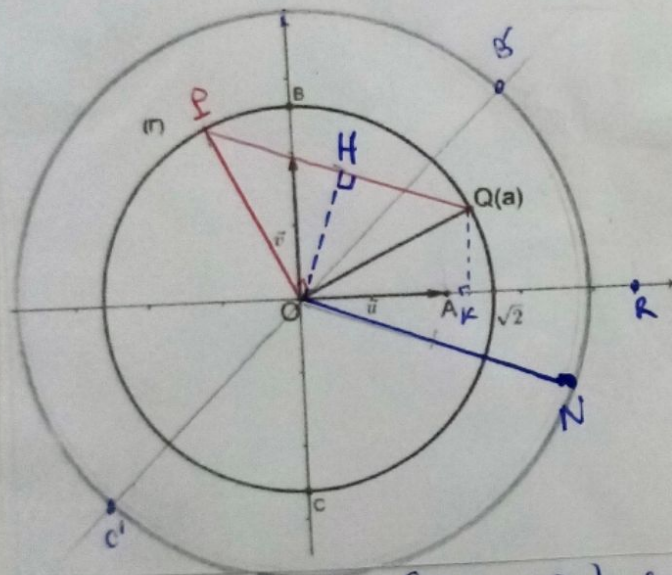
Exercice 01: Principal 2020

1) R: le point d'affixe $(a+\bar{a})$ et $Q(a)$

a) Comme $a+\bar{a} = 2\operatorname{Re}(a) = 2x_Q$
 $\Rightarrow \exists_R$ st réel $\Rightarrow \boxed{R \in (O, \bar{u})}$

$\vec{OR} = 2\vec{x}_Q$

Soit K : projeté orthogonal de Q sur $(O, \bar{u})$
 $\Rightarrow \vec{OR} = 2\vec{OK}$



b) O, R, Q : alignés $\Leftrightarrow (\vec{OQ}, \vec{OR}) = k\pi$

$\Rightarrow \arg(\frac{\vec{OR}}{\vec{OQ}}) = k\pi \Rightarrow \arg(\frac{a+\bar{a}}{a}) = k\pi$

$\Rightarrow \arg(a+\bar{a}) = \arg(a) [k\pi]$

or $(a+\bar{a}) \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg(a+\bar{a}) = k\pi$

$\Rightarrow \arg(a) = k\pi \begin{cases} a = \sqrt{2}e^{i0} = \sqrt{2} \\ a = \sqrt{2}e^{i\pi} = -\sqrt{2} \end{cases}$

2) $P(a)$ et $M(z)$ / $z \in \mathbb{R}^*$
 $z_P = ia = iz_Q \Rightarrow z_P = e^{i\frac{\pi}{2}} z_Q$

$\Rightarrow \boxed{P = R(0, \frac{\pi}{2})(Q)}$

$\Rightarrow \begin{cases} OQ = OP \\ (\vec{OQ}, \vec{OP}) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Rightarrow$

le triangle OQP est rectangle et isocèle en O et de sens direct.

b) A, P, M : alignés $\Leftrightarrow \frac{\arg(AM)}{\arg(AP)} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{z-1}{ia-1} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{z-1}{ia-1} = \overline{\left(\frac{z-1}{ia-1}\right)}$

$\Rightarrow \frac{z-1}{ia-1} = \frac{\bar{z}-1}{-i\bar{a}-1} = \frac{-\bar{z}+1}{i\bar{a}+1}$

$\Rightarrow (z-1)(i\bar{a}+1) = (ia-1)(-\bar{z}+1)$

$\Rightarrow z(i\bar{a}+1) - ia - 1 = -\bar{z}(ia-1) + ia - 1$

$\Rightarrow \boxed{(i\bar{a}+1)z + (ia-1)\bar{z} = i(a+\bar{a})}$

c) $(AP) \perp (OM) \Leftrightarrow \frac{\arg(OM)}{\arg(AP)} \in i\mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{z}{ia-1} = -\overline{\left(\frac{z}{ia-1}\right)} = \frac{-\bar{z}}{-i\bar{a}-1}$

$\Rightarrow z(i\bar{a}+1) = \bar{z}(ia-1)$

$\Rightarrow \boxed{(i\bar{a}+1)z - (ia-1)\bar{z} = 0}$

d) H : projeté orthogonal de O sur (AP)

$\Rightarrow A, P, H$: alignés $\Leftrightarrow (i\bar{a}+1)z_H + (ia-1)\bar{z}_H = i(a+\bar{a})$

et $(OH) \perp (AP) \Rightarrow (i\bar{a}+1)z_H - (ia-1)\bar{z}_H = 0$

(1) + (2): $2(i\bar{a}+1)z_H = i(a+\bar{a})$

$\Rightarrow \boxed{z_H = \frac{i(a+\bar{a})}{2(i\bar{a}+1)}}$

3) $z_N = \frac{a+\bar{a}}{i\bar{a}+1}$

a) $z_H = \frac{i}{2} z_N \Rightarrow z_N = -2i z_H$

$\Rightarrow \boxed{z_N = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} z_H} \Rightarrow N$ est l'image

de H par la similitude directe de centre O de rapport 2 et d'angle $(-\frac{\pi}{2})$

$$b) N = S_{(0, 2, \frac{\pi}{2})} (\neq 1) \Rightarrow \begin{cases} ON = 2OH \\ (\vec{OH}, \vec{ON}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

c) Le triangle OQP: rectangle isocèle en O et direct ou H = O * P et H est le proj ortho de O sur [PQ]

$\Rightarrow$ le triangle OQH: rectangle isocèle en H et de sens direct

$$\Rightarrow \begin{cases} (\vec{OQ}, \vec{OH}) = \frac{\pi}{4} \text{ (2nd)} \\ OH = \frac{\sqrt{2}}{2} OQ \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})} (Q) = H \quad \text{ou} \quad S_{(0, 2, \frac{\pi}{2})} (H) = N$$

$$S_{(0, 2, \frac{\pi}{2})} \circ S_{(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})} (Q) = N$$

$$\Rightarrow S_{(0, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})} (Q) = N$$

Comme Q: décrit $(\Gamma) \setminus \{B, C\}$

$$\Rightarrow N \text{ décrit } S_{(0, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})} (\Gamma) \setminus \{S(B), S(C)\}$$

alors N décrit le cercle $E(0, 2)$

$$\text{puisque } S_{(0, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})} (B) = B'$$

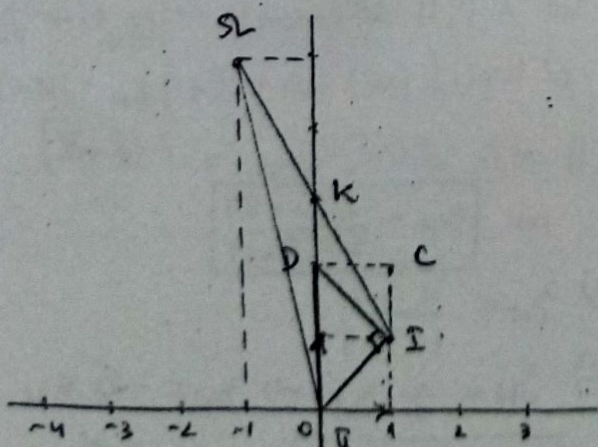
$$\text{et } S_{(0, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})} (C) = C'$$

$$\text{Concl: } N \text{ décrit } E(0, 2) \setminus \{B', C'\}$$

Exercice 02. Contrôle 2019

$$I(1+i) \quad C(1+2i) \quad D(2i) \quad K(3i)$$

$$1) a) I(1,1) \quad C(1,2) \quad D(0,2) \quad K(0,3)$$



$$b) \frac{KD}{DI} = \left| \frac{3i - 2i}{2i - 5i} \right| = \left| \frac{i}{-3i} \right| = \left| \frac{-1}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

$$= \left| -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ il existe une unique similitude indirecte g qui envoie $I \rightarrow D$ et $D \rightarrow K$

$$c) \text{ le rapport de } g \text{ est } k = \frac{KD}{DI} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) le triangle IDO est rectangle et isocèle en I et de sens direct

$\Rightarrow$ l'image de IDO par g est DKC

$$\text{car } g: \begin{matrix} I \rightarrow D \\ D \rightarrow K \end{matrix}$$

et le triangle DKC: rectangle isocèle en g(I) = D et de sens indirect

$$\text{Concl: } \boxed{g(IDO) = DKC}$$

$$\text{Conséquence: } g(0) = C$$

2) a) g : similitude indirecte $\Rightarrow$ la forme

$$\text{Complexe de } g \text{ s'écrit: } z' = a\bar{z} + b$$

$$\sim g(0) = C \Rightarrow z_C = a\bar{0} + b$$

$$\Rightarrow b = z_C = 1+2i$$

$$\text{et } g(I) = D \Rightarrow z_D = a\bar{z}_I + b$$

$$\Rightarrow a = \frac{z_D - b}{\bar{z}_I} = \frac{2i - 1 - 2i}{1 - i} = \frac{-1}{1 - i} = \frac{1}{2}(1+i)$$

$$\text{Concl: } g: \boxed{z' = \frac{1}{2}(1+i)\bar{z} + 1+2i}$$

$$b) \text{ SL: le centre de } g \Rightarrow z_{SL} = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$$

$$\Rightarrow z_{SL} = \frac{\frac{1}{2}(1+i)(1-2i) + 1+2i}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-1+5i}{\frac{1}{2}} = -2+10i$$

$$c) z_{SK} = \frac{z_{SL} + z_I}{2} = z_L = z_K \Rightarrow \boxed{SL * I = K}$$

$$d) g: \begin{matrix} S \rightarrow SL \\ O \rightarrow C \end{matrix} \Rightarrow \Delta \text{ rectangle } [\vec{SO}, \vec{SC}]$$

$$3) h = g \circ g \text{ ou } g = h_{(2, \frac{\pi}{2})} \circ S = S \circ h_{(2, \frac{\pi}{2})}$$

$$\Rightarrow \boxed{g \circ g = h_{(2, \frac{\pi}{2})}}$$

$$b) A = I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad A_{n+2} = h(A_n)$$

$$A_2 = h(A_0) = h(I) = K \text{ car } \vec{SK} = \frac{1}{2}\vec{SI}$$

$$A_4 = h(A_2) = h(K) \Rightarrow \boxed{A_4 = SL * K}$$

$$c) S_n = A_0 A_2 + A_2 A_4 + \dots + A_{2n-2} A_{2n}$$

$$\text{on pose } U_n = A_{2n-2} A_{2n}$$

$$\Rightarrow S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = \sum_{k=1}^n U_k$$

$$\text{or } U_1 = A_0 A_2 = KI = |z_I - z_K| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$$

$$\text{et } U_2 = A_2 A_4 = h(A_0 A_2) = \frac{1}{2} A_0 A_2 = \frac{1}{2} U_1$$

$\Rightarrow$ Mq U_n est une suite géométrique

$$\text{et que } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \sqrt{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} ?$$

$$\text{pour } n=1 : U_1 = \sqrt{5} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \sqrt{5} \text{ vérifié}$$

$$\text{supposons que } U_n = \sqrt{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ vrai } \rightarrow n$$

$$\text{Dj } U_{n+1} = \sqrt{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n ?$$

$$\text{en effet : } U_{n+1} = A_{2n} A_{2n+2} = h(A_{2n-2} A_{2n})$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = h(U_n) = \frac{1}{2} U_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \sqrt{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{alors } S_n = \sum_{k=1}^n U_k = U_1 \left[\frac{1 - q^n}{1 - q} \right]$$

$$\Rightarrow S_n = \sqrt{5} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right] = 2\sqrt{5} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \in]-1, 1[\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2\sqrt{5}$$

Donc : S_n converge vers $2\sqrt{5}$

Exercice 03: Principal 2018

① a) $D \in \mathcal{E} [FG] \Rightarrow$ le triangle DFG est rectangle en D d'où d'après Pythagore :

$$OD^2 = OF \times OG \quad \text{or } OF=1 \text{ et } OG=1+\sqrt{2}$$

$$\text{alors } OD^2 = 1+\sqrt{2}$$

b) $z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}} e^{i\theta}$ or $OD = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow z_A = OD e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

$$A = \mathcal{E}_{(O, OD)} \cap [OT) / (\vec{OE}, \vec{OT}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

② (E) $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} z + e^{i2\theta} = 0$

a) $z_A^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} z_A + e^{i2\theta} = -(1+\sqrt{2})e^{i2\theta} + \sqrt{2}e^{i2\theta} + e^{i2\theta} = 0$

$$\Rightarrow z_A : \text{solution de (E)}$$

b) $P = z_A \cdot z_B = \frac{c}{a} \Leftrightarrow i\sqrt{1+\sqrt{2}} e^{i\theta} \cdot z_B = e^{i2\theta}$

$$\Rightarrow z_B = \frac{e^{i2\theta}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}} e^{i\theta}} = \frac{-i}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta} = -\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta}$$

③ a) $\frac{\arg(\vec{OA})}{\arg(\vec{OB})} = \frac{i\sqrt{1+\sqrt{2}} e^{i\theta}}{-i e^{i\theta}} = -(1+\sqrt{2}) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \vec{OA}$ col à $\vec{OB}$ d'où $[O, A, B]$ alignés

b) $z_C = OD e^{i\theta}$ or $\arg(z_C) = \arg(z_E) = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow C = \mathcal{E}_{(O, OD)} \cap [OE)$$

c) $\frac{\arg(\vec{AC})}{\arg(\vec{AB})} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{OD e^{i\theta} - OD i e^{i\theta}}{-\frac{i}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta} - OD i e^{i\theta}}$

$$= \frac{OD^2 e^{i\theta}(1-i)}{-i e^{i\theta}(1+OD^2)} = \left(\frac{1-i}{-i}\right) \frac{OD^2}{1+OD^2} = (1+i) \frac{(1+\sqrt{2})}{1+1+\sqrt{2}}$$

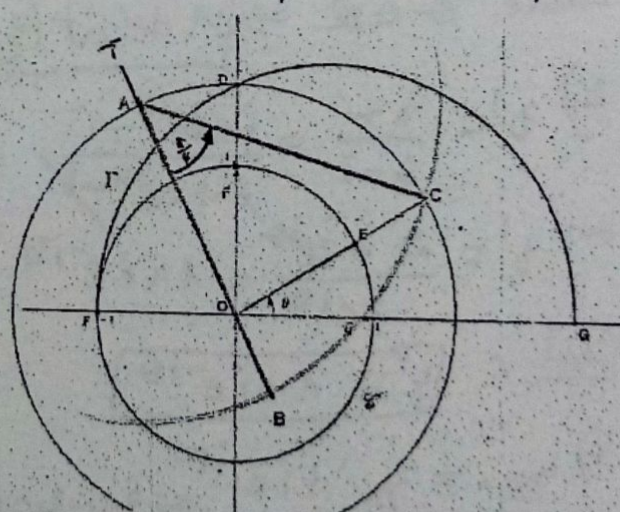
$\Rightarrow \frac{\arg(\vec{AC})}{\arg(\vec{AB})} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$ d'où $\frac{AC}{AB} = 1$

alors $AB = AC : (1) \Rightarrow ABC$ isocèle

$$\text{et } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

d) $B = \mathcal{E}_{(A, AC)} \cap [AC) / (\vec{AO}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$



Exercice 04: Bac 2018 - Contrôle

1) (E) : $z^2 - (1+i)z - i = 0$

$$\Delta = (1+i)^2 + 4i = 6i = 3(2i) = (\sqrt{3}(1+i))^2$$

$$z_1 = \frac{1+i + \sqrt{3}(1+i)}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = \frac{1+i-\sqrt{3}(1+i)}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$S_C = \{z_1; z_2\}$$

$$2) A(1) \quad B(i) \quad M_1(z_1) \quad M_2(z_2)$$

$$M(z) \quad M'(z') \quad / \quad z' = \frac{z+i}{z-i}$$

$$\text{On suppose que } M=M' \Rightarrow z=z'$$

$$\Rightarrow z = \frac{z+i}{z-i} \Rightarrow z^2 - iz = z+i$$

$$\Rightarrow z^2 - (1+i)z - i = 0$$

$$\Rightarrow z = z_1 \text{ ou } z = z_2 \text{ Abscisse}$$

$$\Rightarrow \text{Les points } M \text{ et } M' \text{ sont distincts}$$

$$3) z = i + 2e^{i\theta} \quad / \theta \in \mathbb{R}$$

$$a) z_M = i + 2e^{i\theta} = z_B + 2e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow z_M - z_B = 2e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} |z_M - z_B| = 2 \\ \arg(z_M - z_B) = \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BM = 2 \Rightarrow M \in C_{(B,2)} \\ (\vec{u}, \vec{BM}) \equiv \theta \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$\text{Comme } \theta \in \mathbb{R} \Rightarrow M \text{ décrit } C_{(B,2)}$$

$$b) z' = \frac{z+i}{z-i} = \frac{i+2e^{i\theta}+i}{i+2e^{i\theta}-i}$$

$$\Rightarrow z' = \frac{2i+2e^{i\theta}}{2e^{i\theta}} = 1 + ie^{-i\theta}$$

$$\text{Concl: } \boxed{z' = 1 + ie^{-i\theta}}$$

$$c) z_{M'} = z_A + ie^{-i\theta} \Rightarrow z_{M'} - z_A = ie^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow z_{M'} - z_A = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} \text{ car } i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{donc } \begin{cases} |z_{M'} - z_A| = 1 \\ \arg(z_{M'} - z_A) = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM' = 1 \\ (\vec{u}, \vec{AM'}) \equiv (\frac{\pi}{2} - \theta) \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$d) \text{ si } M \text{ décrit } C_{(B,2)} \Rightarrow z = i + 2e^{i\theta} \Rightarrow z' = 1 + ie^{-i\theta} \Rightarrow \begin{cases} AM' = 1 \\ (\vec{u}, \vec{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M' \text{ décrit le cercle } C_{(A,1)}$$

$$4) P = M * M' \text{ et } Q / z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}} z_P$$

$$a) z_P = \frac{z+z'}{2} = \frac{i+2e^{i\theta}+1+ie^{-i\theta}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_P = \frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}}$$

$$b) z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}} z_P = e^{i\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + 2e^{i\theta} + ie^{-i\theta}}{2} \right]$$

$$\Rightarrow z_Q = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} + 2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} - e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-\theta)}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_Q = \frac{i\sqrt{2} + 2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} - e^{-i(\theta+\frac{\pi}{4})}}{2}}$$

$$c) z_Q = \frac{i\sqrt{2}}{2} + e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} - \frac{1}{2} e^{-i(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{i\sqrt{2}}{2} + \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z_Q = \frac{1}{2} \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + i \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \right]}$$

$$5) a) \text{ on pose } z_Q = x + iy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = 2x \\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{or } \cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 4x^2 + \frac{4}{9} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} = 1} \text{ c'est}$$

l'équation réduite d'une ellipse.

Concl: si M décrit le cercle Γ
 $\Rightarrow Q$ décrit l'ellipse d'équation

$$\boxed{4x^2 + \frac{4}{9}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1} \quad (E)$$

b) Construction de M' :

On a $M' \in E(A, 1) / (\vec{u}, \vec{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta$

$\Rightarrow M' \in (AT) / (\vec{u}, \vec{AT}) = \frac{\pi}{2} - \theta \pmod{2\pi}$

d'où $\boxed{M' = E(A, 1) \cap (AT)}$

Construction de Q :

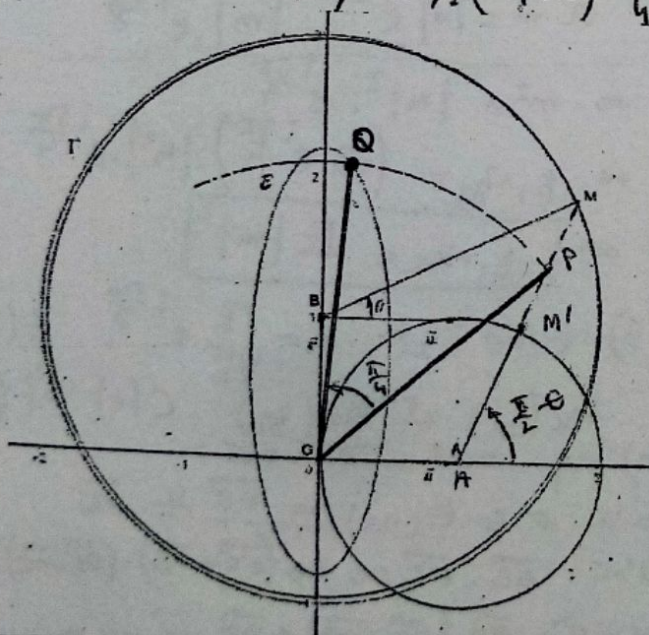
On a $P = M \times M'$

et $|OQ| = |OP| \Rightarrow OQ = OP$

d'où $Q \in E(O, OP) \Rightarrow Q \in E(O, OP) \cap (E)$
 ou $Q \in (E)$

d'où par $(\vec{OP}, \vec{OQ}) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$

Concl: $Q \in E(O, OP) \cap (E) / (\vec{OP}, \vec{OQ}) \equiv \frac{\pi}{4}$



Exercice 05: Bac 2017 - Contrôle

$(E): z^2 - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 = 0$

1) a) $\Delta = \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4$
 $= \frac{9}{4} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} - 4 = \frac{5}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow (E)$ admet 2 solutions distinctes

b) $z_1 + z_2 = S = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\bullet S \notin \mathbb{R} \Rightarrow z_1, z_2$ ne sont pas conjuguées.

$A(z_1) \quad B(z_2) \quad I(1)$ et $J(-1)$

2) a) $C = A \times B \Rightarrow z_C = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{S}{2}$

$\Rightarrow z_C = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}}$

b) $(z_2 - z_1)^2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1z_2$
 $= (2z_C)^2 - 4P \quad / P = z_1z_2 = \frac{c}{a} = 1$

$\Rightarrow \boxed{(z_2 - z_1)^2 = 4z_C^2 - 4 = 4(z_C^2 - 1)}$

c) $(\vec{AB}, \vec{CI}) + (\vec{AB}, \vec{CJ}) = \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_2}\right) + \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$
 $= \arg\left(\frac{1 - z_C}{z_2 - z_1}\right) + \arg\left(\frac{-1 - z_C}{z_2 - z_1}\right) \pmod{2\pi}$
 $= \arg\left(\frac{z^2 - 1}{(z_2 - z_1)^2}\right) = \arg\left(\frac{z_C^2 - 1}{4(z_C^2 - 1)}\right)$
 $= \arg\left(\frac{1}{4}\right) \equiv 0 \pmod{2\pi}$

alors $\boxed{(\vec{AB}, \vec{CI}) + (\vec{AB}, \vec{CJ}) \equiv 0 \pmod{2\pi}}$

d'où $(\vec{AB}, \vec{CI}) \equiv -(\vec{AB}, \vec{CJ}) \pmod{2\pi}$

alors (AB) : bissectrice intérieure de $\widehat{ICJ}$

3) E : cercle circonscrit à IAJ
 k : centre de E .

a) On a $kA = I = kJ$
 $\Rightarrow k \in \text{med}(IJ) \Leftrightarrow \boxed{k \in (OI^2)}$

b) $zk = iy \quad / y \in \mathbb{R}^*$
 Ma $M \in E \Leftrightarrow |z - iy|^2 = |1 - iy|^2$

On a $M \in E \Rightarrow kM = kI$

$\Rightarrow |z_M - z_k|^2 = |z_I - z_k|^2 \Leftrightarrow |z - iy|^2 = |1 - iy|^2$

4) a) construction de $A(m)$

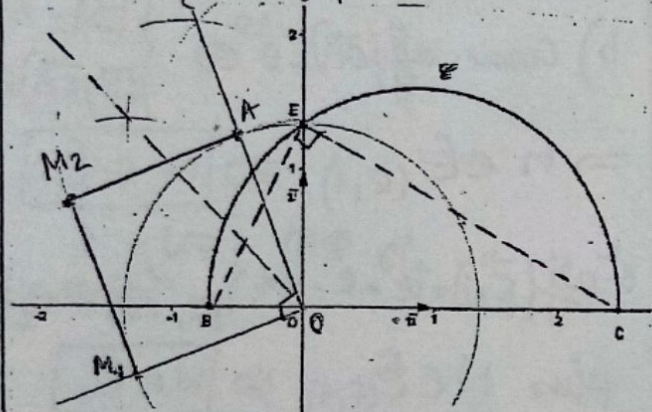
on a $OA = |m| = OE \Rightarrow A \in \mathcal{C}_{(O, OE)}$

$\alpha(\vec{OA}, \vec{OA}) = \arg(m) = \theta = \frac{5\pi}{8} [2\pi]$
 $\Rightarrow A = \mathcal{C}_{(O, OE)} \cap (\mathcal{OT}) / (\vec{u}, \vec{OT}) \equiv \frac{5\pi}{8} [2\pi]$

b) $|z_1| = |im| = |m|$
 $|z_2| = |(1+i)m| = \sqrt{2} \cdot |m| \Rightarrow |z_1| < |z_2|$

$z_{M_1} = im = iz_A = e^{i\frac{\pi}{2}} z_A$

$\Rightarrow \begin{cases} OM_1 = OA \\ \arg(\vec{OA}, \vec{OM_1}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow M_1 = R_{(O, \frac{\pi}{2})}(A)$



Construction de $M_2 / z_2 = (1+i)m$

d'où $z_2 = m + im = z_A + z_1$

$\Rightarrow z_{M_2} - z_{M_1} = z_A - z_O$

$\Rightarrow \arg(\vec{M_1M_2}) = \arg(\vec{OA})$

$\Rightarrow \vec{M_1M_2} = \vec{OA}$ d'où

$M_2 = t_{\vec{OA}}(M_1) \Rightarrow O, A, M_2, M_1 \#$

Exercice 07: Principal 2015

1) a) (E): $z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta' = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$z' = 1 + i\sqrt{3}$ et $z'' = 1 - i\sqrt{3}$

$S = \{1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$

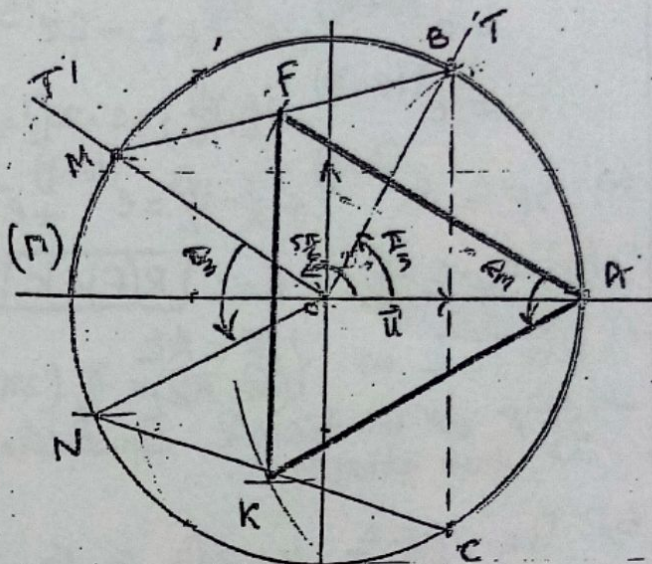
b) $z' = 1 + i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z'' = 1 - i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2) $(\Gamma) = \mathcal{C}_{(O, 2)} \quad A(2)$

$B(2e^{i\frac{\pi}{3}}) = \mathcal{C}_{(O, 2)} \cap (\mathcal{OT}) / (\vec{u}, \vec{OT}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$C(2e^{-i\frac{\pi}{3}} = \bar{z}_B) \Rightarrow C = S_{(O, \vec{u})}(B)$



3) $\theta \in]-\pi, \pi]$ $M(2e^{i\theta})$

$N \in (\Gamma) / (\vec{OM}, \vec{ON}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

on a $z_N = 2e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$

on pose $z_N = re^{i\alpha}$

$\Rightarrow r = |z_N| = ON = 2$ car $N \in (\Gamma)$

d'où $\alpha = \arg(z_N) = (\vec{u}, \vec{ON}) [2\pi]$

$\Rightarrow \alpha = (\vec{u}, \vec{OM}) + (\vec{OM}, \vec{ON}) [2\pi]$

or $(\vec{u}, \vec{OM}) \equiv \arg(z_M) \equiv \theta [2\pi]$

$\Rightarrow \alpha \equiv \theta + \frac{\pi}{3} [2\pi]$

d'où $z_N = 2e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$

4) $r = R(A, \mathbb{C}) : M(z) \mapsto M'(z')$

a) L'application complexe associée à r s'écrit sous forme de:

$z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + z_A \cdot (1 - e^{i\frac{\pi}{3}})$

$\Rightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $F = B * M$ et $K = C * N$

$\Rightarrow z_F = \frac{z_B + z_M}{2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 08: Contrôle 2013

$$e^{\frac{1}{2}} \frac{z}{2k} = \frac{z_c + z_N}{2} = \frac{ze^{-i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3})}}{2} = e + e$$

$$\text{on pose } R(F) = F' \Rightarrow z_{F'} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_F + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow z_{F'} = e^{i\frac{\pi}{3}} [e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}] + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3})} + e^{i\frac{2\pi}{3}} + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= e^{i(\frac{2\pi}{3})} + (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2 - 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\Rightarrow z_{F'} = e^{i(\frac{2\pi}{3})} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i(\frac{2\pi}{3})} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{alors } z_{F'} = z_K \text{ dnc } \boxed{R(F) = K}$$

$$c) R(F) = K \Rightarrow \begin{cases} AF = AK \\ (AF, AK) = \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

$\Rightarrow AFK$ est un triangle équilatéral de sens direct.

$$5) \text{ On } AF^2 = 4 - 2\sqrt{3} \cos(\theta + \frac{\pi}{6})$$

$$\text{on a } AF^2 = |z_F - z_A|^2 = |e + e^{i\frac{\pi}{3}} - 2|^2$$

$$= |\cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2|^2$$

$$= |(\cos\theta - \frac{3}{2}) + i(\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2})|^2$$

$$\Rightarrow AF^2 = (\cos\theta - \frac{3}{2})^2 + (\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

$$= \cos^2\theta - 3\cos\theta + \frac{9}{4} + \sin^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{AF^2 = 4 - 2\sqrt{3} \cos(\theta + \frac{\pi}{6})}$$

$$b) AF: \text{maximal} \Rightarrow \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) = -1$$

$$\Rightarrow \theta + \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{et } \theta \in]-\pi, \pi] \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$e^{\frac{1}{2}} \frac{z}{2k} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$M = (F) \cap [OT) / (M, OT) = \frac{5\pi}{6} (2\pi)$$

$$F = O * M \text{ et } K / AFK \text{ équilatéral}$$

$$E(1), F(i). \quad E_1 = E_{(E,1)} \quad E_2 = E_{(F,1)}$$

$$0 \in [0, 2\pi[\quad M(1+e^{i\theta}); N[i(1+e^{i\theta})]$$

$$1) a) \text{ aff}(\vec{EM}) = z_M - z_E = 1 + e^{i\theta} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{aff}(\vec{EM}) = e^{i\theta}}$$

$$\text{aff}(\vec{FN}) = z_N - z_F = i(1+e^{i\theta}) - i = ie^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{aff}(\vec{FN}) = ie^{i\theta}}$$

$$b) \text{ Comme } \text{aff}(\vec{EM}) = e^{i\theta} \quad \left. \begin{matrix} EM = 1 \\ (E, EM) = \theta (2\pi) \end{matrix} \right\}$$

$$\Rightarrow M \in E_{(E,1)} \Leftrightarrow \boxed{M \in E_1}$$

$$c) \text{ aff}(\vec{FN}) = ie^{i\theta} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \quad \left. \begin{matrix} FN = 1 \\ (F, FN) = \theta + \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{matrix} \right\}$$

$$\text{alors } N \in E_{(F,1)} \Leftrightarrow \boxed{N \in E_2}$$

$$c) \text{ On } (EM) \perp (FN)$$

$$\text{on a } \frac{\text{aff}(\vec{EM})}{\text{aff}(\vec{FN})} = \frac{e^{i\theta}}{ie^{i\theta}} = -i \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{(EM) \perp (FN)}$$

$$2) \perp (1-i)\cos\theta \cdot e^{i\theta}$$

$$a) \frac{\text{aff}(\vec{EP})}{\text{aff}(\vec{EM})} = \frac{z_P - z_E}{z_M - z_E} = \frac{(1-i)\cos\theta \cdot e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$$

$$= \frac{(1-i)\cos\theta - e^{-i\theta}}{1 - e^{-i\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta - i\sin\theta - (\cos\theta - i\sin\theta)}{1 - \cos\theta + i\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta - i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta}{1 - \cos\theta + i\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\text{aff}(\vec{EP})}{\text{aff}(\vec{EM})} = \sin\theta - \cos\theta}$$

$$\frac{\text{aff}(\vec{FP})}{\text{aff}(\vec{FN})} = \frac{z_P - z_F}{z_N - z_F} = \frac{(1-i)\cos\theta \cdot e^{i\theta} - i}{i(1+e^{i\theta}) - i}$$

$$= \frac{(1-i)\cos\theta - e^{-i\theta}}{i}$$

$$\frac{\text{aff}(\vec{FP})}{\text{aff}(\vec{FN})} = (-1-i)\sin\theta - (\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= -\sin\theta - i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta$$

concl: $\frac{\text{aff}(\vec{FP})}{\text{aff}(\vec{FN})} = -\sin\theta - \cos\theta$

b) Mq $P = (EM) \cap (FN)$

ma $\frac{\text{aff}(\vec{EP})}{\text{aff}(\vec{EM})} = (\sin\theta - \cos\theta) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \vec{EP}$ col à $\vec{EM}$

d'où E, P, M alignés $\Rightarrow P \in (EM)$

et ma $\frac{\text{aff}(\vec{FP})}{\text{aff}(\vec{FN})} = (-\sin\theta - \cos\theta) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \vec{FP}$ col à $\vec{FN}$

alors F, N, P alignés $\Rightarrow P \in (FN)$

concl: $(EM) \cap (FN) = \{P\}$

Exercice 09: Contrôle 2012

1) $z^2 - (1+i)a z + ia^2 = 0$

$$\Delta = [(1+i)a]^2 - 4ia^2$$

$$= 2ia^2 - 4ia^2 = -2ia^2$$

$$= (1-i)^2 a^2 = [(1-i)a]^2$$

$\Rightarrow z' = \frac{(1+i)a - (1-i)a}{2} = ia$

$z'' = \frac{(1+i)a + (1-i)a}{2} = a$

$S_C = \{ia, a\}$

2) A(a) B(ia)

a) Nature de OAB:

ma $\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \frac{a}{ia} = -i \in i\mathbb{R}^*$

$\Rightarrow \vec{OA} \perp \vec{OB}$ (1)

et $\left| \frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} \right| = |-i| = 1 \Rightarrow OA = OB$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ le triangle OAB est un triangle rectangle et isocèle en O et de sens direct.

b) OACB carré $\Rightarrow OACB \neq$

$\Leftrightarrow \vec{OA} = \vec{BC} \Leftrightarrow z_A - z_O = z_C - z_B$

$\Rightarrow z_C = z_A + z_B = a + ia$

$\Rightarrow \boxed{z_C = (1+i)a}$

3) a) Mq $z_P = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$?

ma OAP : équilatéral direct

$\Rightarrow \begin{cases} OA = OP \\ \angle(\vec{OA}, \vec{OP}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_P - z_O}{z_A - z_O} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_P - z_O}{z_A - z_O}\right) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{z_P - z_O}{z_A - z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_P - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot z_A$

$\Rightarrow \boxed{z_P = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a}$

b) AQC : équilatéral direct $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} AQ = AC \\ \angle(\vec{AQ}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_Q - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_Q - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{z_C - z_A}{z_Q - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_Q - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$\Rightarrow z_Q - z_A = (z_C - z_A) \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Rightarrow z_Q = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot z_C + z_A \cdot (1 - e^{i\frac{\pi}{3}})$

$\Rightarrow z_Q = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)a + a\left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{z_Q = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \frac{1}{2}ia}$

c) Montrons que B, P, Q alignés

ma $\frac{z_P - z_B}{z_Q - z_B} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - ia}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \frac{1}{2}ia - ia}$

$= \frac{1 + (\sqrt{3} - 2)i}{(2 + \sqrt{3}) - i} \cdot \frac{(2 + \sqrt{3}) + i}{(2 + \sqrt{3}) + i}$

$\Rightarrow \frac{z_P - z_B}{z_Q - z_B} = \left[\frac{4}{8 + 4\sqrt{3}} + i \frac{\sqrt{3} - 4 + 1}{8 + 4\sqrt{3}} \right]$

$$\Rightarrow \frac{z_P - z_B}{z_Q - z_B} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \in \mathbb{R}^*$$

alors $\overrightarrow{PB}$ col à $\overrightarrow{QB}$

d'où les points P, B, Q sont alignés

Exercice 10: Bac 2011 - Principal

$$A(-1) \quad M(z) \quad N(z^2) \quad P(z^3)$$

avec $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}$

1) a) Montrons que :

$$MNP \text{ rectangle en } P \Leftrightarrow \frac{1+z}{z} \in i\mathbb{R}$$

$$\text{car } MNP \text{ rectangle en } P \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \frac{\arg(\overrightarrow{MP})}{\arg(\overrightarrow{NP})} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_P - z_M}{z_P - z_N} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z^3 - z}{z^3 - z^2} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z(z+1)(z-1)}{z^2(z-1)} \in i\mathbb{R}$$

$$\text{car } z \neq 0 \text{ et } z \neq 1 \Rightarrow \frac{z+1}{z} \in i\mathbb{R}$$

$$\text{car } : MNP \text{ rectangle en } P \Leftrightarrow \frac{z+1}{z} \in i\mathbb{R}$$

$$b) z = x + iy \Rightarrow \frac{1+z}{z} = \frac{(x+1) + iy}{x + iy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+z}{z} = \frac{x(x+1) + y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{yx - y(x+1)}{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + x + y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$c) MNP \text{ triangle en } P \Leftrightarrow \frac{z+1}{z} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

alors M varie sur $E(x, \frac{1}{2})$ avec $\Omega(-\frac{1}{2}, 0)$

et $A(-1) \Rightarrow \Omega = O * A$ et $\{0, A\} \subset E(x, \frac{1}{2})$

et comme $z \neq 0$ et $z \neq -1 \Rightarrow M \neq O$ et $M \neq A$

car : M décrit (Γ) : le cercle de diamètre $[OA]$ privé de O et A.

$$2) a) (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \arg\left(\frac{z_N}{z_M}\right) = \arg\left(\frac{z^2}{z}\right)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \arg(z) \equiv [\vec{u}, \overrightarrow{OM}] [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv \arg\left(\frac{z_P}{z_N}\right) = \arg\left(\frac{z^3}{z^2}\right) = \arg(z)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv [\vec{u}, \overrightarrow{ON}] [2\pi]$$

$$\text{car } : (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv [\vec{u}, \overrightarrow{ON}] [2\pi]$$

$$b) Mq \quad OH = OM^2$$

$$\text{car } M(z = x + iy) \Rightarrow M(x, y)$$

$$\text{et } H : \text{proj orth de } M \text{ sur } (\overrightarrow{OU}) \Rightarrow H(x, 0)$$

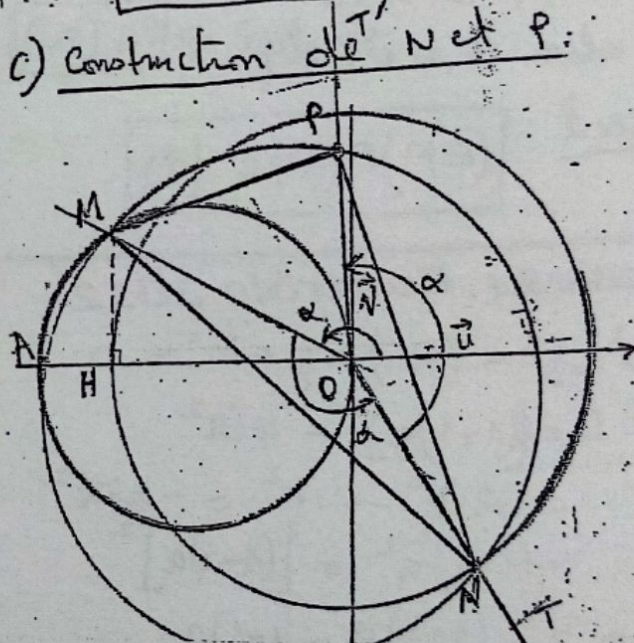
$$\Rightarrow OH = |x| = |z| = -x \text{ car } x < 0$$

$$\text{et } M(x, y) \in E(x, \frac{1}{2}) \Rightarrow x^2 + y^2 + x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = -x \text{ et } OM^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{d'où } OM^2 = OH$$

c) Construction de N et P :



$$\text{on a } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$$

$$\Rightarrow (OM) = \text{bissectrice de } (\vec{u}, \overrightarrow{ON})$$

$$\text{alors } N \in (OT) / (\vec{u}, \overrightarrow{OT}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi] \quad (1)$$

$$\text{et } ON = |z_N| = |z^2| = |z|^2 = OM^2 = OH$$

$$\Rightarrow N \in E(O, OH) \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow N = E(O, OH) \cap (OT)$$

d'autre part, MNP rectangle en P

$$\Rightarrow P \in E(MN) \quad (3)$$

$$\text{et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) [2\pi]$$

$$\Rightarrow (OI) : \text{bissectrice de } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \wedge (OT) \Rightarrow P \in (OT) / (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OT}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi] \quad (4)$$

$$(3) \text{ et } (4) \Rightarrow P = E(MN) \cap (OT)$$

Exercice 1: Bac 2010 - Principal

$$A(-2) \quad d(E): 3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$$

$$\alpha \in \mathbb{C}^* \quad M(\alpha) \quad N\left(\frac{3}{2}\alpha^2\right) \quad P\left(\frac{8}{\alpha}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad & \text{Si } \alpha \in \mathbb{R}^* \Rightarrow M \in (O\vec{u}) \\ & \text{et } 3\alpha = \frac{3}{2}\alpha^2 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow N \in (O\vec{u}) \\ & \text{et } 3\alpha = \frac{8}{\alpha} \in \mathbb{R}^* \Rightarrow P \in (O\vec{u}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

les points M, N et P sont alignés.

$$2) \quad MNAP \# \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA} \Leftrightarrow$$

$$3\alpha - 2\alpha = 3\alpha - 2\alpha \Leftrightarrow \frac{3}{2}\alpha^2 - \alpha = -2 - \frac{8}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 = -4\alpha - 16 \Leftrightarrow$$

$$3\alpha^3 - 2\alpha^2 - 4\alpha + 16 : (E)$$

$$\text{donc si } MNAP \# \Rightarrow \alpha : \text{sol de } (E)$$

$$3) a) \alpha = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\cdot \frac{3}{2}\alpha^2 = \frac{3}{2}(2e^{i\frac{\pi}{3}})^2 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

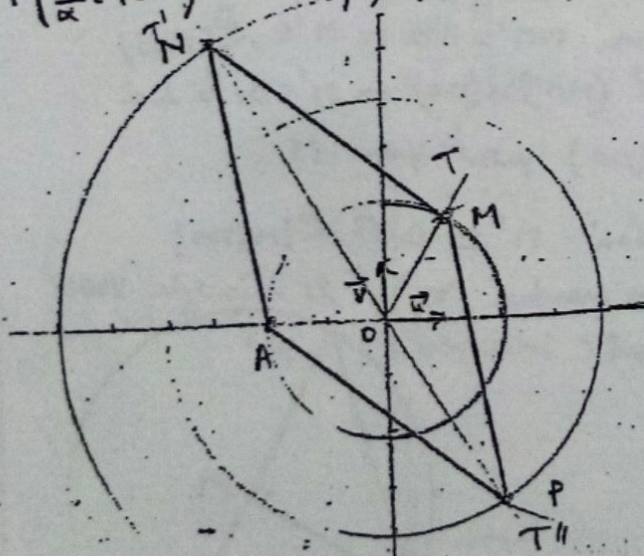
$$\cdot \frac{8}{\alpha} = \frac{8}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\cdot A(-2) \Rightarrow A(-2, 0)$$

$$\cdot M(\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}}) \Rightarrow M = E_{(0,2)} \cap (OT) / (O, \vec{OT}) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\cdot N\left(\frac{3}{2}\alpha^2\right) = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow N = E_{(0,6)} \cap (OT') / (O, \vec{OT}') = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\cdot P\left(\frac{8}{\alpha} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \Rightarrow P = E_{(0,4)} \cap (OT'') / (O, \vec{OT}'') = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



$$b) \cdot \frac{3}{2}\alpha^2 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3i\sqrt{3}$$

$$\cdot \frac{8}{\alpha} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - 2i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{Mg } MNAP \#$$

$$\text{aff}(\overrightarrow{MN}) = z_N - z_M = \frac{3}{2}\alpha^2 - \alpha = -3 + 3i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{aff}(\overrightarrow{MN}) = -4 + 2i\sqrt{3}$$

$$\text{aff}(\overrightarrow{PA}) = z_A - z_P = -2 - 2 + 2i\sqrt{3} = -4 + 2i\sqrt{3}$$

$$\text{donc } \text{aff}(\overrightarrow{MN}) = \text{aff}(\overrightarrow{PA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$$

$$\text{donc } \boxed{MNAP \text{ est un } \#}$$

$$4) a) \quad \text{Si } \alpha : \text{sol de } (E) \Rightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(\alpha)^3 - 2(\alpha)^2 + 4\alpha + 16 = 0 \quad \text{alors}$$

$$\alpha : \text{solution de } (E)$$

$$b) \quad MNAP \# \Rightarrow \begin{cases} \alpha : \text{solution de } (E) \\ \alpha \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\alpha (E) \text{ est une équation de } 3^{\text{e}} \text{ degré}$$

$$\Rightarrow (E) \text{ admet 3 solutions dans } \mathbb{C}$$

$$\text{et comme si } \alpha : \text{solution de } (E) \Rightarrow \bar{\alpha} : \text{solution}$$

$$\text{donc } (E) : \text{admet forcément une solution}$$

$$\text{réelle (à rejeter) car sinon } (E) \text{ aura}$$

$$\text{un nombre pair de solutions (Abstrusité)}$$

$$\text{alors } (E) \text{ admet exactement 2 solutions}$$

$$\text{conjuguées non réelles et 1 solution réelle}$$

$$\text{or } \alpha = 1 + i\sqrt{3} \text{ solution de } (E) \text{ car}$$

$$MNAP \# \text{ un } \# \Rightarrow \bar{\alpha} = 1 - i\sqrt{3} \text{ est}$$

$$\text{aussi solution de } (E).$$

$$\text{donc si } M_1(\alpha = 1 + i\sqrt{3}) \text{ et } M_2(\bar{\alpha} = 1 - i\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \boxed{MNAP \text{ est un } \#}$$

Exercice 12: QCM: Contrôle 2009

$$1) \quad z \in \mathbb{C} \quad / \quad |z| = 2 \Rightarrow z\bar{z} = |z|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\bar{z} = \frac{4}{z}} \quad \text{alors } \boxed{C}$$

$$2) \quad A(1) \quad B(i) \Rightarrow \frac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = 0 \text{ ou } \pi \\ \text{ou } \frac{z-i}{z-1} = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A, B) = O(\vec{1}) \\ \text{ou } n = B \end{cases}$$

$$\Rightarrow M \in (AB) \cup \{A\} \quad \text{alors } \boxed{A}$$

Exercice 13: QCM: Bac 2009 Principal

$$1) \quad A(1 + i\sqrt{3}) \text{ et } A' = R_{(0, \frac{\pi}{3})}(A)$$

$$\text{L'application complexe associée}$$

$$\text{est } R \text{ s'écrivant } z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + z_0(1 - e^{i\frac{\pi}{3}})$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz \Rightarrow z_A' = +iz_A$$

$$z_A = 1+i\sqrt{3} \Rightarrow z_{A'} = -i(1+i\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{A'} = \sqrt{3} - i} \Rightarrow \boxed{b}$$

$$2) z \in \mathbb{C}^* / \arg(z) = \frac{\pi}{6} \text{ alors}$$

$$\arg(i\bar{z}) = \arg(i) + \arg(\bar{z})$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arg(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\arg(i\bar{z}) = \frac{\pi}{3}} \text{ d'où } \boxed{c}$$

Exercice 14: Bac 2008 Contrôle

$$(E) z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0$$

$$1) a) z = \alpha : \text{ solution réelle de (E)}$$

$$\alpha^3 + (5+i)\alpha^2 + (10+2i)\alpha + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha^3 + 5\alpha^2 + 10\alpha + 8) + i(\alpha^2 + 2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 + 5\alpha^2 + 10\alpha + 8 = 0 & (1) \\ \alpha^2 + 2\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

$$\cdot \text{ Si } \alpha = 0 \Rightarrow (1): 8 = 0 \text{ Absurde}$$

$$\cdot \text{ Si } \alpha = -2 \Rightarrow (1): -8 + 20 - 20 + 8 = 0 \text{ vérifié}$$

$$\Rightarrow z = -2 \text{ est la solution réelle de (E)}$$

$$b) (E) \text{ s'écrit } (z+2)[az^2 + bz + c] = 0$$

$$\Leftrightarrow az^3 + (b+2a)z^2 + (c+2b)z + 2c = 0$$

par identifi

$$\begin{cases} a = 1 \\ b+2a = 5+i \Rightarrow b = 3+i \\ c+2b = 10+2i \\ 2c = 8 \Rightarrow c = 4 \end{cases} \text{ vérifiée}$$

$$\Rightarrow (E): (z+2)[z^2 + (3+i)z + 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z+2=0 \Rightarrow \boxed{z=-2} \\ \text{ou } z^2 + (3+i)z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (3+i)^2 - 16 = -8 + 6i = (1+3i)^2$$

$$\Rightarrow z' = \frac{-3-i-1-3i}{2} = -2-2i$$

$$z'' = \frac{-3-i+1+3i}{2} = -1+i$$

$$S = \{-2, -2-2i, -1+i\}$$

$$2) f: P \rightarrow P$$

$$M(z) \mapsto M'(z') / z' = (1+i)z$$

$$a) \text{ on pose } a = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} z$$

d'où f est l'application complexe associée à la similitude directe de rapport $k=\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$

$$I \text{ de centre } z_0 = \frac{b}{1-a} = 0 = z_0$$

$$\text{conf: } \boxed{f = S(0, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})}$$

$$b) f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = \sqrt{2} OM \\ (\vec{OM}, \vec{OM'}) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{on a alors } \frac{MO}{MM'} = \frac{|z|}{|z'-z|} = \frac{|z|}{|z|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{MO}{MM'} = 1 \Rightarrow MO = MM'$$

$$I(\vec{MO}, \vec{MM'}) = \arg\left(\frac{z'-z}{z-z_0}\right) = \arg(i)$$

$$\Leftrightarrow (\vec{MO}, \vec{MM'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ alors}$$

$MO = MM'$: $\Delta M OM'$ est un triangle isocèle et rectangle en M et de sommet

Construction de M' :

Soit $n \in P \setminus \{O\}$

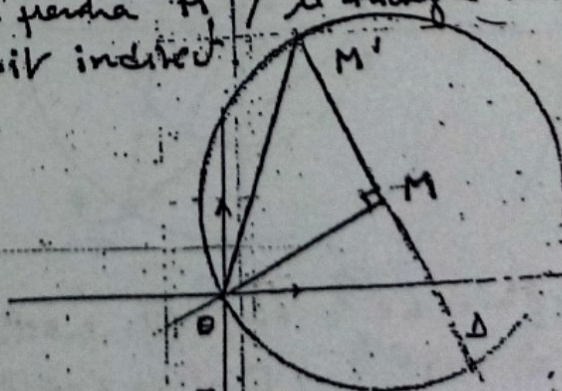
on a $MM' = MO = n \in E(n, MO)$

et $(MM') \perp (MO) \Rightarrow M' \in D: la \perp \tilde{a}$

(MO) part par M

d'où $M' \in D \cap E(n, MO)$

on prendra M' / le triangle non nul



3) $A_0(1+i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = f(A_n)$

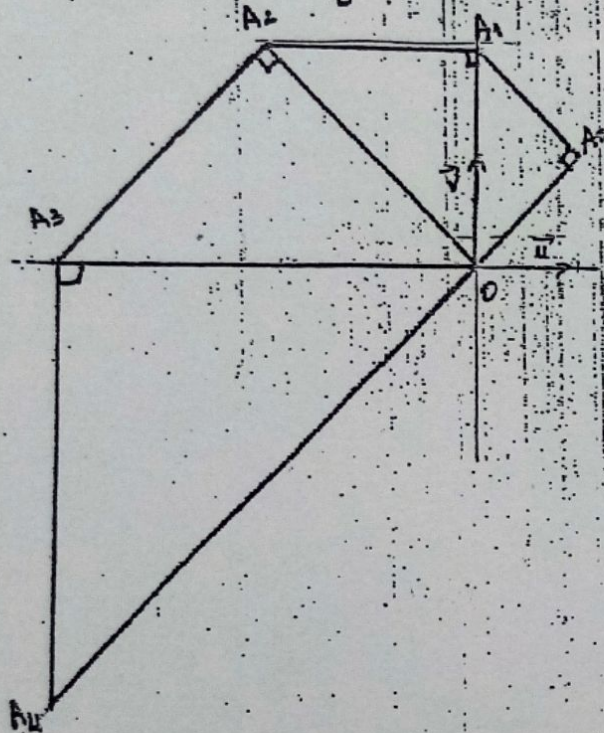
a) $A_0(-1+i) \Rightarrow A_0(-1, 1)$

$A_1 = f(A_0) \Rightarrow OA_0A_1$: rectangle isocèle en A_0 direct

$A_2 = f(A_1) \Rightarrow OA_1A_2$: rectangle isocèle en A_1 direct

$A_3 = f(A_2) \Rightarrow OA_2A_3$: rectangle isocèle en A_2 direct

$A_4 = f(A_3) \Rightarrow OA_3A_4$: rectangle isocèle en A_3 direct



b) O, A_0, A_n : alignés $\Leftrightarrow \vec{OA_n}$ col à $\vec{OA_0}$
 $\Leftrightarrow \frac{\arg(\vec{OA_n})}{\arg(\vec{OA_0})} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_n}{z_0} \in \mathbb{R}$

$\cdot n_4 \forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}} z_0$

pm $n=0$, $z_0 = e^{i0} z_0 = 1 z_0$ vérifié

supp que $z_n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}} z_0$ vraie $\rightarrow n$

Dq $z_{n+1} = (\sqrt{2})^{n+1} e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}} z_0$

en fait: $z_{n+1} = f(z_n) = (1+i)z_n$

$\Leftrightarrow z_{n+1} = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}) z_n = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}) (\sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}} z_0)$
 $= (\sqrt{2})^{n+1} e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}} z_0$

also $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}} z_0$

also $a' \frac{z_n}{z_0} = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow n = 4k$

d'où A_0, O, A_n : alignés si
 n est un multiple de 4